ROLL NO....................

BA3BS3M02/22

ANNUAL EXAMINATION, 2022

B.A./B.Sc.-III

MATHEMATICS

PAPER-II

ABSTRACT ALGEBRA

TIME: 3 HOURS **Maximum: 50**
Minimum: 17

नोटः- प्रत्येक इकाई से किन्हीं दो भाग हल करो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।
Note: Solve any two parts from each unit. All questions carry equal marks.

UNIT-I

प्र.1. (a) माना G एक समूह है तथा $g \in G$ का एक स्थिर अवयव है, तब सिद्ध कीजिए की फलन $Tg: G \rightarrow G$ जो $Tg\,(x) = gxg^{-1} \forall x \in G$ से परिभाषित है, G का एक स्वाकारिता है।

Let G be a group & $g \in G$ be a fixed element. Then prove that the function $Tg: G \rightarrow G$ which is defined by $Tg\,(x) = gxg^{-1}$ is an automorphism of G.

(b) यदि $o(G) = 56$ सिद्ध कीजिए कि G, 1 या 8 सिलो उपसमूह रखता है। अंत्य की स्थिति में सिद्ध कीजिए कि G एक प्रसामान्य 2– सिलो उपसमूह रखता है।

If $o(G) = 56$, prove that G has 1 or 8 sylow subgroup. Finaly, prove that G has a normal 2-sylow subgroup.

P.T.O.

(c) माना $G, N_1, N_2 --- N_n$ का आंतरित अनुलोम गुणनफल है जहाँ $N_1, N_2 --- N_n, G$ के प्रसामान्य उपसमूह हैं। तब दर्शाइये कि $N_i \cap N_j = \{e_j\}, i \neq j.$

Let $N_1, N_2 --- N_n$ be the internal direct products of G, where $N_1, N_2 --- N_n$ are normal subgroups of G then prove that $N_i \cap N_j = \{e_j\}, i \neq j.$

UNIT-II

प्र.2. (a) सिद्ध कीजिए कि एक वलय का प्रत्येक विभाग वलय, वलय का समाकारी प्रतिबिम्ब होता है।

Prove that every quotient ring of a ring is a homomorphic image of a ring.

(b) आइंस्टीन सूत्र की मदद से दिखाइये कि बहुपद $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ परिमेय संख्याओं के लिए अखंडनीय हैं।

By use of Einstein criterian show that polynomial $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ is irreducible for rational numbers.

(c) सिद्ध कीजिये कि उपमाड्यूलो का स्वेच्छ सर्वनिष्ठ एक उपमाड्यूल होता है।

Prove that, arbitrary intersections of submodules is also a submodule.

(c) माना P_2 कोटि 2 तक के बहुपदों का समुच्चय है जिसके उपर आंतर गुणन निम्न प्रकार से परिभाषित है–

$(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x).g(x)dX$ जहाँ P_2 का $\{1, X, X^2\}$ आधार है

इस आधार की सहायता से प्रसामान्य लांबिक आधार ज्ञात कीजिए।

Let P_2 be the set of polynomials of order 2 and inner product is defined as $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x).g(x)dX, where$ $\{1, X, X^2\}$ is a basis of P_2. Find out the orthonomal basis with the help of given basis.

-------xxxx-------

UNIT-III

प्र.3. (a) सिद्ध कीजिए कि $R[x] = \{p(x), q(x), r(x)\}$, जहाँ

$p(x) = 1 + x + 2x^2, q(x) = 2 - x + x^2, r(x) = -4 + 5x + x^2$

का निकाय रैखिमितः परतंत्र है।

Prove that $R[x] = \{p(x), q(x), r(x)\}$, where

$p(x) = 1 + x + 2x^2, q(x) = 2 - x + x^2, r(x) = -4 + 5x + x^2$

system is linearly dependent.

(b) विस्तार प्रमेय का कथन लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State & prove extension theorem.

(c) $V_3(R)$ के आधार समुच्चय $S = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ के सापेक्ष सदिश $\propto = (a, b, c)$ के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

Find the co-ordinate of vector $\propto = (a, b, c)$ relative to basis set $S = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ for $V_3(R)$.

UNIT-IV

प्र.4. (a) माना T, R^3 पर एक रैखिक संकारक है जो

$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 - x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_3)$ से परिभाषित है, आधार $B = \{\propto_1, \propto_2, \propto_3\}$ जहाँ $\propto_1 = (1,1,1)$, $\propto_2 = (0,1,1), \propto_3 = (1,0,1)$ के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिए।

Let T be a linear operator on R^3 which is define as

$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 - x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_3)$

find the matrix with respect to Basis $B = (\propto_1, \propto_2, \propto_3)$ where $\propto_1 = (1,1,1)$, $\propto_2 = (0,1,1), \propto_3 = (1,0,1)$

(b) कोटि शून्यता प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State & prove Rank nulity theorem.

(c) निम्न हार्मेटीय समघात के विकर्ण समघात में सामानयन कीजिए–

Reduce the following Hermitian quadratic to diagonal quadratic

$\bar{x}_1, x_1 + 2\bar{x}_2 x_2 + 3\bar{x}_3 x_3 - 2i\,\bar{x}_1 x_2 + 2i\,x_1 \bar{x}_2 - 3i\,\bar{x}_2 x_3 + 3i\,\bar{x}_3 x_2$

UNIT-V

प्र.5. (a) सिद्ध कीजिए कि निम्न आन्तर गुणन के सापेक्ष $V_2(R)$ के आंतर गुणन समष्टि है। $(\alpha, \beta) = a_1 b_1 - a_2 b_1 - a_1 b_2 + 2a_2 b_2$, जहाँ

$\alpha = (a_1, b_1)\ \&\ \beta(a_2, b_2)$

Prove that the following inner product is and inner product space $(\alpha, \beta) = a_1 b_1 - a_2 b_1 - a_1 b_2 + 2a_2 b_2$, where

$\alpha = (a_1, b_1)\ \&\ \beta(a_2, b_2)$

(b) सदिश आंतर गुणन में दो सदिश α तथा β लांबिक होगें यदि और केवल यदि $\|a \propto + b\beta\|^2 = \|a \propto\|^2 + \|b\beta\|^2$, जहाँ a, b अदिश है।

$\alpha\ \&\ \beta$ are two orthogonal vectors in inner product space if and only if $\|a \propto + b\beta\|^2 = \|a \propto\|^2 + \|b\beta\|^2$ where a, b are scalars.